

## *Note éducative*

# Étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt

## Commission des rapports financiers des compagnies d'assurance-vie

**Décembre 2009**

Document 209122

*This document is available in English*

© 2009 Institut canadien des actuaires

*Les membres doivent connaître les notes éducatives. Les notes éducatives décrivent mais ne recommandent pas une pratique à adopter dans certains cas. Elles ne constituent pas des normes de pratique et sont donc de caractère non exécutoire. Elles ont pour but d'illustrer l'application (qui n'est toutefois pas exclusive) des normes de pratique, de sorte qu'il ne devrait y avoir aucun conflit entre elles. Elles visent à aider les actuaires en ce qui concerne l'application de normes de pratique dans des circonstances spécifiques. Le mode d'application de normes en pareilles circonstances demeure la responsabilité du membre dans le domaine de l'assurance-vie.*

## Note de service

**À :** Tous les praticiens en assurance-vie

**De :** Tyrone G. Faulds, président  
Direction de la pratique actuarielle  
B. Dale Mathews, présidente  
Commission des rapports financiers des compagnies d'assurance-vie

**Date :** Le 3 décembre 2009

**Objet:** **Note éducative – Étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt**

La Commission des rapports financiers des compagnies d'assurance-vie (CRFCAV), par l'entremise du Groupe de travail sur l'étalonnage, a établi un ensemble initial de critères aux fins de l'étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt.

Le groupe de travail a adopté une approche composée de plusieurs étapes pour mettre au point les critères d'étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt. Les résultats et recommandations découlant de la phase I des travaux du groupe de travail figurent dans la note éducative ci-jointe.

Les travaux de la phase I ont porté sur les critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme. Ainsi, ces critères seront nécessaires mais non suffisants pour les modèles qui génèrent des taux tant à long qu'à court termes. Il conviendrait de faire preuve de prudence dans des situations comme les suivantes :

- produits supportés par des actifs à court et à moyen termes;
- CPG, rentes à court terme avec options de paiement forfaitaire;
- évaluations intégrant des écarts de crédit.

Les résultats de la phase I sont directement applicables aux taux d'intérêt canadiens ou aux instruments libellés en dollars canadiens, mais ils peuvent, sous réserve de certains ajustements, être adaptés pour les États-Unis et d'autres pays industrialisés.

La prochaine phase portera sur les taux d'intérêt sans risque à court et à moyen termes et sur la corrélation entre les taux à court, à moyen et à long termes. Les travaux ultérieurs pourraient porter sur les écarts de crédit, sur d'autres marchés, sur la corrélation entre les taux d'intérêt et les actions, et sur la corrélation entre les taux d'intérêt et les devises.

Une fois la plupart des travaux sur les critères d'étalonnage de la phase I achevés, mais avant la publication de la présente note éducative, deux événements importants justifiant d'autres commentaires sont survenus, à savoir :

la crise financière actuelle; et

la publication de critères d'étalonnage par l'American Academy of Actuaries.

La crise financière a généré des taux à long terme qui, contrairement aux attentes de la plupart des observateurs, sont les plus bas depuis cinquante ans, et il existe présentement beaucoup d'incertitude quant aux conditions futures. À notre avis, les récents événements confirment la pertinence de l'approche d'étalonnage à l'égard du :

fait d'avoir recours à l'historique incluant les années 1930 et 1940; et

fait de compléter l'information historique par un jugement pour s'assurer que les situations extrêmes sont adéquatement prises en compte.

Personne ne sait si les années et les décennies à venir seront marquées par une économie chancelante et de faibles taux, une inflation et des taux élevés attribuables à la dette publique ou un retour à la stabilité et à des taux d'intérêt plus modérés comme ceux observés à partir d'environ 1990 jusqu'en 2005. La CRFCAV croit toutefois que des critères d'étalonnage reposant sur un nombre suffisant d'années pour tenir compte de toutes ces possibilités sont adéquats. L'approche principale consistant à étalonner directement en fonction des taux observés plutôt qu'indirectement au moyen d'un modèle étalonné en fonction des fluctuations historiques des taux est habituellement plus robuste à cet égard.

Nous avons récemment observé une combinaison particulière dans l'histoire financière moderne, à savoir des taux extrêmement faibles combinés à une grande volatilité de ces taux. Ces conditions sont prises en compte, dans une faible mesure, dans les critères d'étalonnage sur 2 et 10 ans, mais en tenir pleinement compte pourrait exiger des modèles de fluctuation de la volatilité ou de changement de régime, lesquels sont plus complexes que les outils ayant servi à élaborer les critères dont il est question dans la présente note. L'actuaire ferait preuve de prudence si le passif est sensible à l'exposition à court terme à une grande volatilité.

En décembre 2008, l'American Academy of Actuaries (AAA) a diffusé un rapport à l'intention du Life and Health Actuarial Task Force de la National Association of Insurance Commissioners portant sur les critères d'étalonnage. Les travaux de l'AAA incluaient notamment la publication d'ensembles de scénarios stochastiques qui peuvent être utilisés directement et des critères d'étalonnage à respecter si les actuaires choisissent d'élaborer leurs propres modèles stochastiques. L'approche adoptée par l'AAA et celle adoptée par l'ICA présentent des similitudes et des différences et il pourrait être intéressant pour l'actuaire de prendre connaissance du document de l'AAA.

La présente note éducative porte sur l'étalonnage de modèles stochastiques de taux d'intérêt qui exigent habituellement l'exécution d'un grand nombre de scénarios. À des fins d'évaluation, il ne serait normalement pas pratique de calculer des passifs selon chaque scénario utilisé dans la mise à l'essai de l'étalonnage, mais il y aurait lieu d'utiliser un sous-ensemble de ces scénarios ou un nombre moindre de scénarios conçus pour représenter l'ensemble. Les méthodes de réduction du nombre de scénarios ne

s'inscrivent pas dans la portée du présent document. L'actuaire peut s'en remettre aux normes de pratique et au recours à des approximations, ainsi qu'à d'autres documents portant sur les techniques de réduction du nombre de scénarios.

Enfin, les membres du groupe de travail ont contribué aux travaux en fonction de leurs propres compétences et expertise. Les idées exprimées dans cette note sont le fruit d'un consensus général parmi les membres du groupe de travail. Rien dans la présente note éducative ne serait interprété comme représentant l'opinion de l'un ou l'autre des employeurs des membres du groupe, ou comme une opinion ou une position à l'égard de la politique des organismes de réglementation.

Conformément à la Politique sur le processus officiel d'approbation de matériel d'orientation autre que les normes de pratique, la présente note éducative a été préparée par la CRFCV et approuvée pour diffusion par la Direction de la pratique actuarielle le 3 novembre 2009.

TGF, BDM

**TABLE DES MATIÈRES**

1. OBJET/RÉSUMÉ .....	6
2. OBJECTIFS ET PRINCIPES .....	7
3. TAUX D'INTÉRÊT HISTORIQUES .....	8
4. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE DES MODÈLES DE TAUX D'INTÉRÊT À LONG TERME .....	9
5. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE DE L'ÉTAT STATIONNAIRE.....	12
5.1 Comparaison avec les valeurs historiques .....	13
5.2 Résultats de la mise à l'essai du modèle.....	13
5.3 Taux initial aux fins de l'étalonnage.....	15
6. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE SUR 2 ANS ET SUR 10 ANS.....	16
7. CRITÈRES DU RETOUR À LA NORMALE.....	17
8. PRODUCTION DE SCÉNARIOS .....	17
9. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE POUR LES AUTRES PAYS.....	17
ANNEXE A .....	19
ANNEXE B .....	23
ANNEXE C .....	24

## 1. OBJET/RÉSUMÉ

La présente note éducative a pour objet d'étudier et de mettre au point des méthodes et normes pour des critères d'étalonnage de modèles stochastiques de taux d'intérêt. Notre attention se porte d'abord sur les taux d'intérêt sans risque à long terme – soit les taux d'intérêt dont l'échéance résiduelle est d'au moins 20 ans.

Dans les normes de pratique, le paragraphe 2320.08 fait les recommandations suivantes et le paragraphe 2330.32 donne les conseils suivants au sujet du choix des scénarios stochastiques de taux d'intérêt.

2320.08 *Les scénarios d'hypothèses de taux d'intérêt devraient comprendre un scénario de base, tel que défini au paragraphe 2330.09.1; chacun des scénarios prescrits à appliquer sur une base déterministe; une fourchette de taux comprenant chacun des scénarios prescrits lorsqu'il y a modélisation stochastique; et d'autres scénarios convenant à la situation de l'assureur.*

2330.32 Si la modélisation stochastique est effectuée, l'actuaire s'assurerait que le modèle stochastique englobe des scénarios qui produisent un passif des polices à l'extérieur de la fourchette générée par l'application des scénarios déterministes prescrits.

Les divers modèles de taux d'intérêt et l'établissement des paramètres des modèles peuvent produire des ensembles de scénarios très différents. Nonobstant toute définition d'une fourchette plausible de taux d'intérêt canadiens sans risque, les normes ci-dessus donnent peu de conseils quant au choix, à l'ajustement et à l'utilisation d'un modèle stochastique de taux d'intérêt. La CRFCAV visait entre autres choses à promouvoir une réduction de la diversité de pratiques et estimait que des conseils supplémentaires seraient utiles à l'actuaire.

Il est souhaitable d'avoir un ensemble de critères d'étalonnage qui peut être appliqué avec cohérence au plus grand nombre possible de produits d'assurances et de placement sensibles aux taux d'intérêt, incluant des produits à court et à long termes. La phase I porte sur l'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme dont les résultats pourraient ensuite être utilisés dans l'évaluation de produits supportés par des placements à long terme. La prochaine phase portera sur les taux d'intérêt sans risque à court et à moyen termes et sur la corrélation entre les taux à court, à moyen et à long termes. Des travaux ultérieurs pourraient porter sur les écarts de crédit, sur d'autres marchés, sur la corrélation entre les taux d'intérêt et les actions, et sur la corrélation entre les taux d'intérêt et les devises.

Les scénarios générés qui répondent à ces critères d'étalonnage ne sont pas destinés à être utilisés aux fins de tarifier une obligation ou un instrument dérivé.

De nombreux modèles de taux d'intérêt sont disponibles, depuis des modèles à volatilité fixe jusqu'à des modèles à volatilité stochastique, et de modèles à régimes uniques à des modèles à régimes multiples. Il est impossible de dresser la liste de tous les modèles et

des paramètres requis pour chacun. Cependant, des commentaires généraux et un aperçu de ces modèles figurent à l'Annexe A.

## 2. OBJECTIFS ET PRINCIPES

Afin de produire des critères d'étalonnage raisonnables, les principes suivants ont été adoptés. Les critères :

seraient suffisamment rigoureux pour restreindre l'étendue de pratique, tout en permettant à l'actuaire d'appliquer un jugement raisonnable dans des circonstances particulières;

seraient appliqués à l'ensemble des scénarios produits;

seraient appliqués non seulement aux parties à l'état stationnaire des scénarios produits, mais également au court terme;

favoriseraient l'élaboration d'ensembles de scénarios qui peuvent être utilisés pour mesurer à la fois l'exposition aux chocs soudains de la courbe de rendement et aux augmentations ou aux baisses de taux graduelles sur de longues périodes de temps, en accord avec les observations historiques;

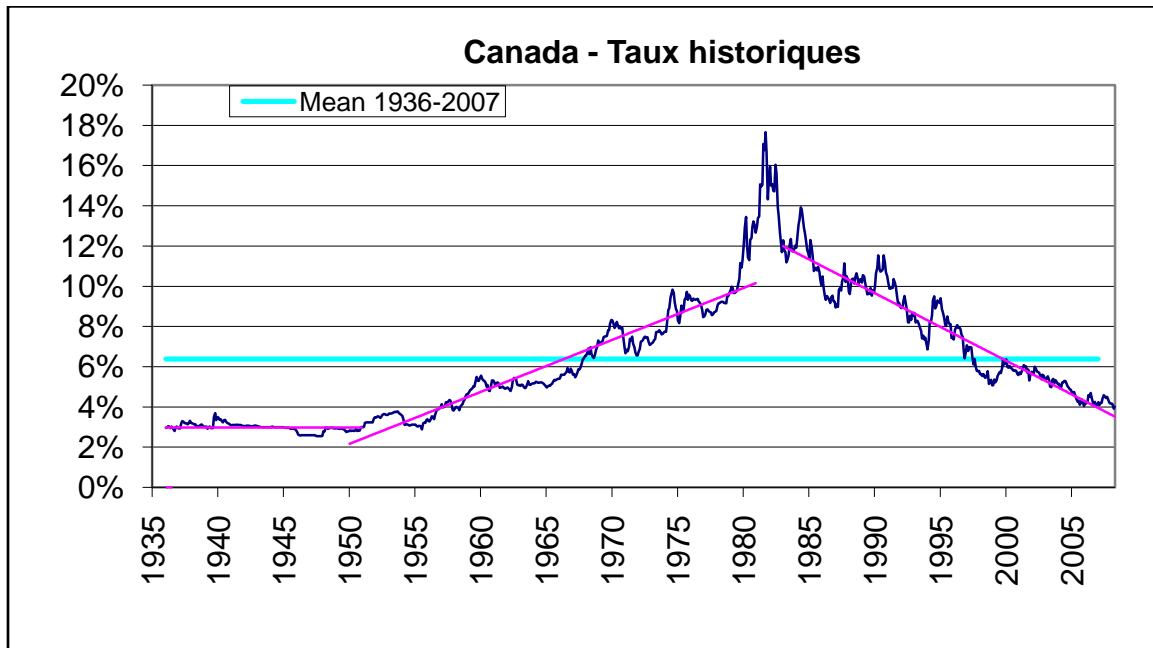
intégreraient les distributions moyennes de taux d'intérêt correspondant à des périodes prolongées ainsi que des distributions à certains horizons choisis.

Un équilibre entre des conseils d'ordre quantitatif et des conseils d'ordre qualitatif a été pris en compte. Un ensemble de critères reposant exclusivement sur une analyse quantitative peut dépendre de manière exagérée des données historiques, peut être influencé de manière subjective par le choix de la période historique et ne tient pas compte des différences économiques et monétaires entre la période historique et la période présente. Les critères qualitatifs viennent compléter les exigences quantitatives et incitent l'actuaire à utiliser des modèles raisonnables au plan économique. Des commentaires qualitatifs sont formulés pour les deux derniers principes énoncés ci-haut.

Le groupe de travail s'est demandé s'il fallait examiner les taux réels (et l'inflation) ou les taux nominaux. Le groupe de travail a opté pour les taux nominaux étant donné qu'il n'était pas pratique de tenir compte de la complexité des taux réels et de l'inflation et que l'historique des taux nominaux était disponible. L'actuaire consulterait les normes de pratique si la relation entre l'inflation et les taux nominaux soulève des préoccupations au chapitre de l'évaluation.

### 3. TAUX D'INTÉRÊT HISTORIQUES

Le graphique suivant illustre les taux historiques des obligations à long terme du gouvernement du Canada (« GC »).



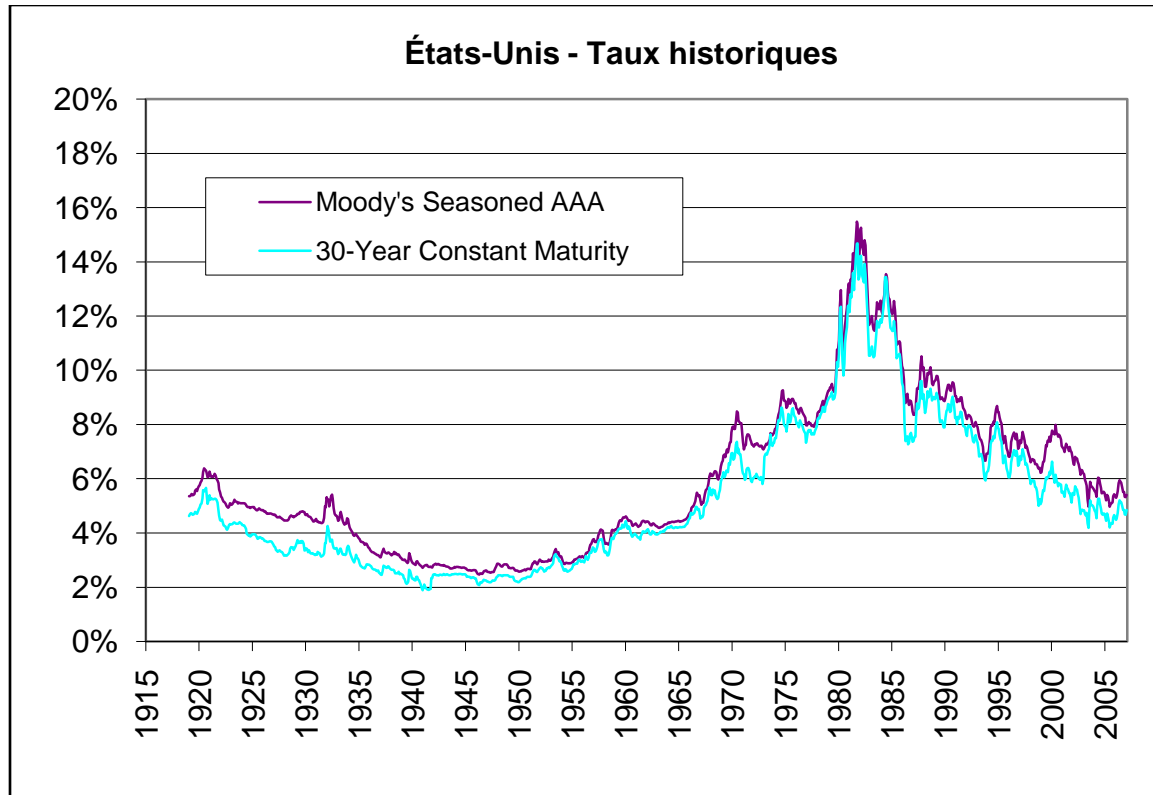
Source : Banque du Canada, série V122487

(Nota : certaines données n'ont pu être traduites)

On peut constater, dans ce graphique, trois schémas distincts avec au départ, une période de faibles taux d'intérêt qui prévalaient pendant la dépression des années 1930 et la Seconde Guerre mondiale, suivie d'une période de hausse continue des taux d'intérêt pendant les années 1970 et 1980 et enfin d'une période de taux d'intérêt en baisse continue jusqu'à aujourd'hui. La dynamique caractérisant cette période de 75 ans est complexe, car le système monétaire a, durant cette période, subi des changements qui pourraient avoir influencé le niveau et la volatilité des taux d'intérêt. Par exemple, des taux d'inflation et nominaux élevés ont été enregistrés dans les années 1970 et 1980, suite à quoi des banques centrales sont intervenues pour contrôler l'inflation après les années 1980.

Pendant ces trois périodes, les taux d'intérêt ont fluctué de manière cyclique en accord avec les cycles économiques. Il y a des cycles à court terme et possiblement à plus long terme. Il y a des périodes où les taux d'intérêt demeurent faibles et d'autres, qui ont tendance à être de courte durée, où ils sont extrêmement élevés.

Le graphique suivant illustre les taux des US 30-year Constant Maturities Treasuries historiques et des obligations de sociétés notées AAA émises depuis au moins trois mois. Les taux d'intérêt aux É.-U. présentent un modèle semblable aux taux canadiens.



Source : Federal Reserve Bank de St. Louis  
(Nota : certaines données n'ont pu être traduites)

En se basant sur ces données, un modèle bien conçu présenterait les particularités suivantes. Le modèle :

- produirait une grande variété de résultats, en accord avec les fourchettes historiques;
- produirait des périodes continues de taux faibles;
- produirait des périodes continues de taux élevés (mais avec faible probabilité de taux extrêmement élevés);
- produirait des périodes de taux à tendance à la baisse et de taux à tendance à la hausse;
- passerait entre des taux faibles et des taux élevés dans une période de temps raisonnable.

#### **4. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE DES MODÈLES DE TAUX D'INTÉRÊT À LONG TERME**

Cette section donne un aperçu de l'ensemble complet des critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme. Les sections suivantes décrivent plus en détail chaque composante des critères d'étalonnage.

La méthode utilisée pour élaborer les critères d'étalonnage avait pour objectif, d'une part, de tenir compte des données historiques, et d'autre part, de faire preuve de jugement étant donné que le passé ne peut, au mieux, que donner une idée de ce que pourrait être

l'avenir. Il convient de supposer que les économies et les marchés financiers évoluent selon des cycles (ou selon des fluctuations irrégulières) et qu'il y aura probablement des extrêmes et des périodes de taux élevés et des périodes de faibles taux. En ce sens, l'approche adoptée tient compte à la fois des données historiques, des discussions et des considérations sur les différences entre le passé et le présent, ainsi que sur ce que peut nous réserver l'avenir.

Pour construire un modèle et générer des scénarios de taux d'intérêt, l'approche habituelle consisterait à choisir un modèle et à en déterminer des paramètres selon une procédure appropriée. Il s'agirait ensuite d'examiner les résultats des scénarios issus du modèle afin de déterminer si les critères d'étalonnage ont été respectés. S'il y a lieu, les paramètres seraient alors ajustés afin de produire des scénarios de taux d'intérêt révisés conformes aux critères d'étalonnage.

L'étalonnage comporte les trois exigences suivantes :

- satisfaire aux critères d'étalonnage de l'extrémité gauche et de l'extrémité droite de la distribution;
- produire un taux médian raisonnable; et
- satisfaire à une contrainte de retour à la moyenne.

Des critères d'étalonnage ont été élaborés pour les horizons de deux ans, dix ans et 60 ans de la projection. Les scénarios de taux d'intérêt aux horizons de deux ans et de dix ans seront influencés par le taux d'intérêt initial et donc, des critères d'étalonnage pour un taux d'intérêt initial de 4 %, 6,25 % et 9 % sont fournis. À l'horizon de 60 ans, on s'attendrait à ce que l'incidence du taux initial soit minimale; ainsi, seuls des critères d'étalonnage pour un taux initial de 6,25 % sont fournis. Les modèles seront habituellement contraints par un sous-ensemble ou quelques centiles clés à chacun des points de mesure. Par exemple, sur les six critères à l'horizon de 60 ans, un modèle est habituellement contraint par seulement deux critères. Cependant, ces points clés varieront d'un modèle à l'autre.

Les critères d'étalonnage visent surtout les extrémités de la distribution (c.-à-d.,  $\leq 10^{\text{e}}$  centile et  $\geq 90^{\text{e}}$  centile) comme suit.

Critères d'étalonnage des taux d'intérêt à long terme								
		Horizon de deux ans			Horizon de dix ans			Horizon de 60 ans
		Taux initial			Taux initial			Taux initial
		4 %	6,25 %	9 %	4 %	6,25 %	9 %	6,25 %
Centile de l'extrémité gauche	2,5	2,95 %	4,40 %	6,20 %	2,50 %	3,20 %	4,00 %	2,60 %
	5	3,10 %	4,65 %	6,55 %	2,70 %	3,50 %	4,45 %	2,95 %
	10	3,30 %	4,95 %	6,95 %	3,00 %	3,90 %	5,00 %	3,40 %
Centile de l'extrémité droite	90	5,05 %	7,70 %	10,70 %	6,60 %	9,05 %	11,60 %	10,00 %
	95	5,40 %	8,15 %	11,30 %	7,45 %	10,25 %	12,80 %	12,00 %
	97,5	5,70 %	8,60 %	11,80 %	8,25 %	11,40 %	13,90 %	13,50 %

Ces critères seront respectés si le modèle produit des valeurs de centiles qui sont inférieurs ou égaux à chacun des critères de l'extrémité gauche et supérieurs ou égaux à chacun des critères de l'extrémité droite.

En outre, à l'horizon de 60 ans, une médiane ne se situant pas dans la fourchette de 5,00 % à 6,75 % serait habituellement jugée déraisonnable. La décision de choisir un modèle avec une médiane ne se situant pas dans cette fourchette nécessiterait l'appui d'un raisonnement clairement documenté.

Enfin, pour tous les modèles, le taux de retour à la moyenne ne serait pas plus fort que 14,5 ans (ce qui correspond à une demi-vie de 10 ans).

Les modèles étalonnés en fonction de ces critères produiront des scénarios de taux d'intérêt sans risque à long terme comportant des taux à long terme qui augmentent et qui diminuent rapidement tant dans des environnements de taux élevé que de taux faible (c.-à-d., chocs) ainsi que des taux d'intérêt qui diminuent et qui augmentent graduellement. Les critères du retour à la moyenne produiront aussi des scénarios montrant des périodes soutenues de taux élevés et de taux faibles. Toutes ces caractéristiques sont souhaitables et en accord avec les résultats historiques.

L'élaboration des critères d'étalonnage est expliquée plus en détail dans les sections suivantes.

## 5. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE DE L'ÉTAT STATIONNAIRE

L'« état stationnaire » est défini comme le moment au-delà duquel la distribution des scénarios de taux d'intérêt générés par le modèle ne change que de manière négligeable. Ce moment peut se produire dans un avenir très lointain. Pour des raisons d'ordre pratique, les critères d'étalonnage sont définis à un horizon précis de 60 ans.

On a amorcé l'étalonnage avec l'état stationnaire car, par définition, il est indépendant du rendement initial. À partir de l'état stationnaire, nous avons défini les critères d'étalonnage aux points plus rapprochés de l'horizon de projection, là où le rendement initial influence les résultats.

Voici les critères d'étalonnage d'un horizon long auquel le modèle satisferait.

Critères d'étalonnage de l'état stationnaire		Taux
Centile		
Extrémité gauche	2,5 <sup>e</sup>	2,60 %
	5 <sup>e</sup>	2,95 %
	10 <sup>e</sup>	3,40 %
Extrémité droite	90 <sup>e</sup>	10,00 %
	95 <sup>e</sup>	12,00 %
	97,5 <sup>e</sup>	13,50 %

Ces critères seront respectés si le modèle produit des résultats qui sont inférieurs ou égaux à chacun des critères de l'extrémité gauche et supérieurs ou égaux à chacun des critères de l'extrémité droite.

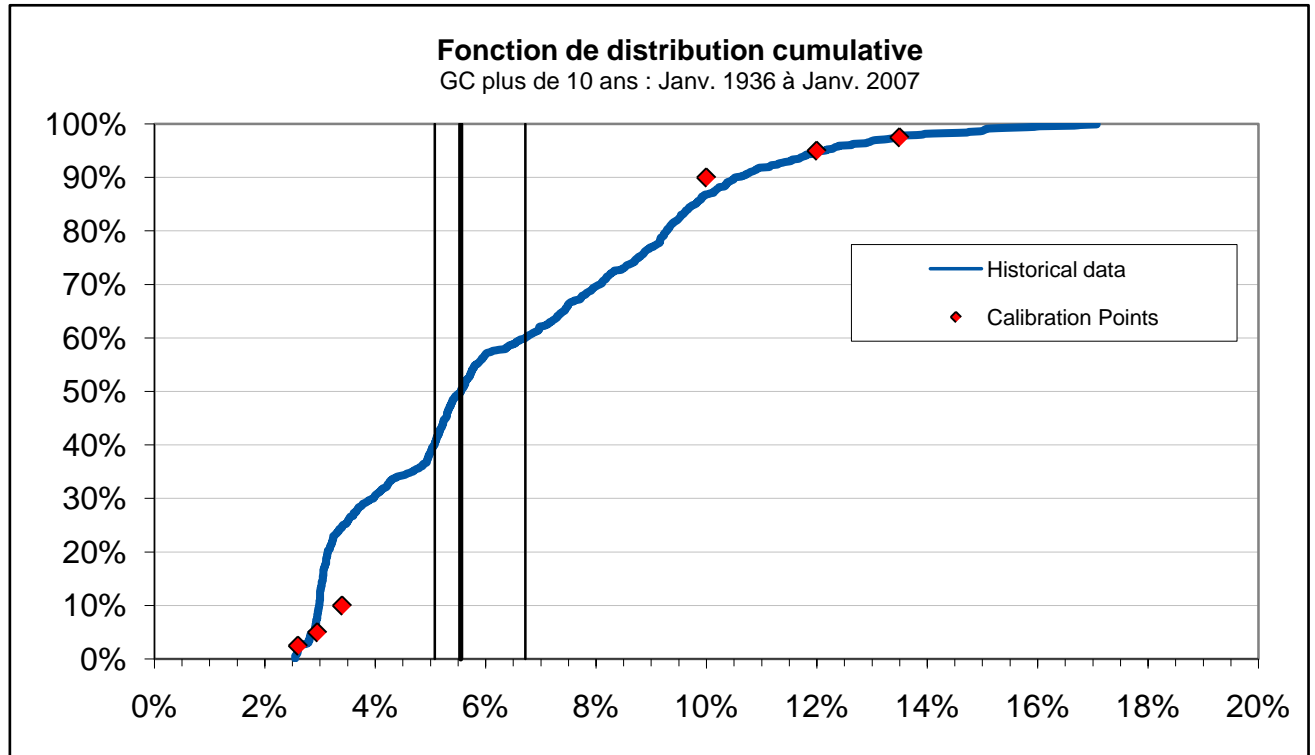
Plutôt que des critères quantitatifs précis d'étalonnage pour établir la moyenne ou la médiane de la distribution, des conseils plus généraux ont été fournis. Entre 1936 et 2007, le rendement moyen et médian des obligations canadiennes à long terme sans risque se situait, respectivement, à 6,35 % et 5,55 %. Les 40<sup>e</sup> et 60<sup>e</sup> centiles se situent à 5,08 % et 6,72 %, respectivement. Les modèles produisant une valeur médiane inférieure à la valeur moyenne seraient conformes à ces données historiques. Une fourchette de valeurs se situant autour de la valeur médiane historique serait acceptable, cependant une valeur médiane ne se situant pas entre 5,00 % et 6,75 % serait jugée déraisonnable, à moins d'être justifiée.

### 5.1 Comparaison avec les valeurs historiques

Comme on peut le constater dans le tableau et le graphique ci-dessous, les critères d'étalonnage sont en accord avec les valeurs historiques à la plupart des points d'étalonnage.

Comparaison entre les critères d'étalonnage de l'état stationnaire et les taux d'intérêt historiques				
Centile		Taux	1936-2007	Écart
Extrémité gauche	2,5 <sup>e</sup>	2,60 %	2,61 %	(0,01) %
	5 <sup>e</sup>	2,95 %	2,90 %	0,05 %
	10 <sup>e</sup>	3,40 %	2,99 %	0,41 %
Extrémité droite	90 <sup>e</sup>	10,00 %	10,56 %	(0,56) %
	95 <sup>e</sup>	12,00 %	12,16 %	(0,16) %
	97,5 <sup>e</sup>	13,50 %	13,44 %	0,06 %

On a tenu compte du profil des fonctions de distribution cumulative que les modèles seraient raisonnablement en mesure de produire. Exiger une plus étroite correspondance avec les valeurs historiques serait trop conservateur et difficile à réaliser en tenant également compte des différences entre les contextes économiques et financiers des périodes historiques par rapport à l'expérience récente.



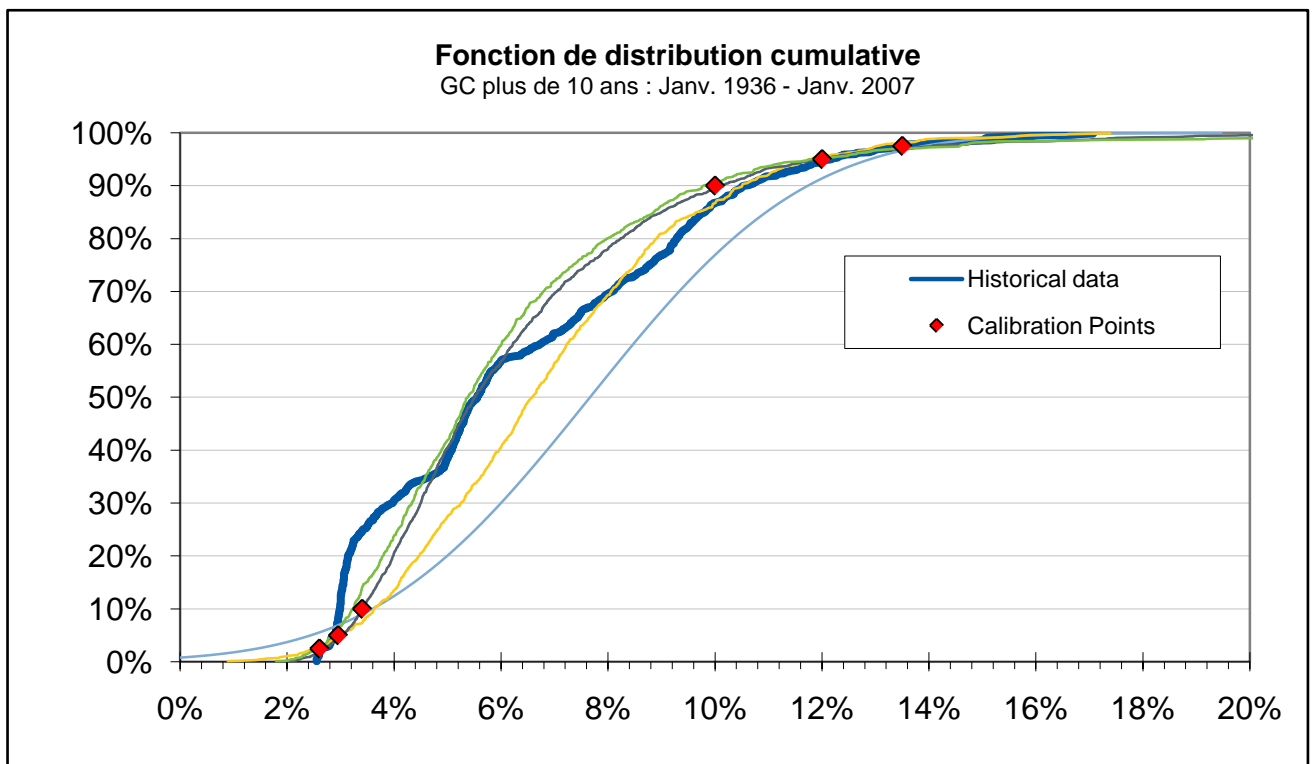
Source : Banque du Canada, série V122487  
(Nota : Certaines données n'ont pu être traduites)

### 5.2 Résultats de la mise à l'essai du modèle

L'étalonnage de l'état stationnaire a été mis à l'essai à l'aide de plusieurs modèles couramment utilisés et publiquement disponibles. La mise à l'essai de modèles visait à déterminer si des modèles courants pouvaient, avec l'établissement de paramètres raisonnables, produire des scénarios répondant aux critères d'étalonnage.

À cette fin, divers types de modèles ont été utilisés, notamment Vasicek (VAS), Cox-Ingersoll-Ross (CIR), Brennan-Schwartz (BS) et Multiplicative Shock (MS). Les modèles CIR, BS et MS ont été étalonnés en supposant une période de retour à la moyenne de 15 ans. Les détails sur l'établissement des modèles CIR et BS figurent à l'Annexe B.

Le graphique suivant illustre les résultats de certains de ces tests.



Source des données historiques : Banque du Canada, série V122487  
(Nota : certaines données n'ont pu être traduites)

Nos tests démontrent que les modèles VAS et CIR sont contraints par les 10<sup>e</sup> et 97,5<sup>e</sup> centiles et les modèles BS et MS, par les 2,5<sup>e</sup> et 90<sup>e</sup> centiles. Cette observation est également apparente dans le tableau comparatif des résultats des modèles ci-dessous.

<b>Critères d'étalonnage du taux permanent – Résultats de la mise à l'essai des modèles</b>					
Centile	Critères	Vasicek	CIR	BS	MS
1 <sup>er</sup>		0,14 %	1,83 %	2,30 %	2,30 %
2 <sup>e</sup>		0,99 %	2,17 %	2,52 %	2,52 %
2,5 <sup>e</sup>	2,60 %	1,29 %	2,30 %	2,60 %	2,60 %
5 <sup>e</sup>	2,95 %	2,27 %	2,78 %	2,90 %	2,91 %
10 <sup>e</sup>	3,40 %	3,40 %	3,40 %	3,28 %	3,29 %
médian		7,39 %	6,34 %	5,47 %	5,47 %
90 <sup>e</sup>	10,00 %	11,39 %	10,58 %	10,00 %	10,00 %
95 <sup>e</sup>	12,00 %	12,52 %	12,07 %	12,18 %	12,12 %
97,5 <sup>e</sup>	13,50 %	13,50 %	13,53 %	14,63 %	14,57 %
98 <sup>e</sup>		13,79 %	13,98 %	15,55 %	15,45 %
99 <sup>e</sup>		14,64 %	15,45 %	18,59 %	18,50 %

En outre, les résultats des modèles montrent une fourchette pour le 50<sup>e</sup> centile (médiane), le VAS étant un cas atypique. La fourchette des 40<sup>e</sup> et 60<sup>e</sup> centiles des résultats historiques est de 5,08 % à 6,72 %. Le taux médian des modèles CIR, BS et MS se situe dans cette fourchette. Le résultat du modèle Vasicek ne se situe pas dans cette fourchette et ne répondrait pas au critère dont il est question à la section 5.

Nos tests ont porté principalement sur des modèles à régime unique et un peu de travail a été effectué avec un modèle à régimes multiples. Les critères d'étalonnage sont tout aussi applicables aux modèles à volatilité fixe et à volatilité stochastique. Cependant, l'actuaire qui a recours à des modèles à volatilité stochastique s'assurerait que les paramètres des modèles répondant aux critères d'étalonnage sont établis de manière raisonnable et que les modèles sont raisonnables au plan économique.

### 5.3 Taux initial aux fins de l'étalonnage

L'approche initiale consistait à utiliser la courbe de rendement courante comme point de départ pour tester les critères d'étalonnage, selon l'hypothèse que la distribution de l'état stationnaire est indépendante du taux initial. Nos tests ont révélé que lorsqu'un retour à la moyenne relativement faible est utilisé dans les modèles choisis, l'effet du taux initial persiste pendant une très longue période.

Pour éviter d'avoir à étalonner le modèle fréquemment pour tenir compte des légères fluctuations des taux d'intérêt sur de courtes périodes, il est recommandé d'étalonner le modèle en utilisant un taux initial de 6,25 % et un horizon de projection de 60 ans. L'actuaire mettrait à l'essai et s'assurerait qu'un nombre suffisant de scénarios soient généré de sorte que la distribution de l'état stationnaire soit stable.

Cette approche tient également compte d'une question pratique, à savoir que dans la plupart des cas, les paramètres des modèles seront établis, et les modèles seront mis à l'essai, et les scénarios, exécutés, avant la date d'évaluation et qu'il est probable que les taux d'intérêt varient pendant cette période.

## 6. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE SUR 2 ANS ET SUR 10 ANS

Pour étalonner à des horizons à plus court terme, le taux initial est important. Voilà pourquoi des critères appropriés pour des contextes initiaux de taux d'intérêt faibles, moyens et élevés ont été établis. Un modèle étalonné répondrait aux critères applicables à l'état stationnaire ainsi qu'aux critères applicables à chacun des trois taux d'intérêt initiaux que voici.

Critères d'étalonnage sur 2 ans et sur 10 ans							
		Horizon de 2 ans			Horizon de 10 ans		
		Taux initial			Taux initial		
		4 %	6,25 %	9 %	4 %	6,25 %	9 %
Centile de l'extrémité gauche	2,5 <sup>e</sup>	2,95 %	4,40 %	6,20 %	2,50 %	3,20 %	4,00 %
	5 <sup>e</sup>	3,10 %	4,65 %	6,55 %	2,70 %	3,50 %	4,45 %
	10 <sup>e</sup>	3,30 %	4,95 %	6,95 %	3,00 %	3,90 %	5,00 %
Centile de l'extrémité droite	90 <sup>e</sup>	5,05 %	7,70 %	10,70 %	6,60 %	9,05 %	11,60 %
	95 <sup>e</sup>	5,40 %	8,15 %	11,30 %	7,45 %	10,25 %	12,80 %
	97,5 <sup>e</sup>	5,70 %	8,60 %	11,80 %	8,25 %	11,40 %	13,90 %

Pour déterminer ces critères, nous avons d'abord étudié les résultats historiques. Toutefois, puisque les données disponibles pour analyser la progression des taux pour chacun des taux initiaux sont limitées, les résultats du profil des modèles CIR et BS qui ont été utilisés pour tester l'étalonnage de l'état stationnaire ont principalement été utilisés pour définir les critères de l'horizon de plus courte durée, en faisant preuve d'un certain jugement. Pour définir les critères d'étalonnage sur 2 ans et sur 10 ans, nous avons utilisé les résultats du modèle ayant produit une dispersion plus étroite des taux d'intérêt. Les modèles respectant ces critères produiront un éventail raisonnable de résultats aux horizons de 2 ans et de 10 ans.

Il est probable que les modèles étalonnés pour satisfaire aux critères applicables à l'état stationnaire répondront également aux critères sur 2 ans et sur 10 ans énoncés ci-dessus, avec peu ou pas d'ajustements additionnels aux paramètres. Il est raisonnable d'ajouter ces critères aux taux initiaux de 4 % et de 9 %, car le passé montre que les taux d'intérêt peuvent fluctuer de manière importante en peu de temps.

## 7. CRITÈRES DU RETOUR À LA MOYENNE

L'expérience montre que les taux d'intérêt peuvent demeurer faibles durant de longues périodes. Les critères d'étalonnage élaborés jusqu'ici ne contraignent pas suffisamment les modèles à refléter des contextes économiques de taux d'intérêt faibles pendant plusieurs années.

Voilà pourquoi il a fallu ajouter une limite pour tous les modèles de façon à ce que le taux du retour à la moyenne ne soit pas plus fort (c.-à-d., de plus courte durée ou plus rapide) que 14,5 années (ce qui correspond à une demi-vie de 10 ans).

Pour des modèles simples comportant un facteur explicite de retour à la moyenne, il est possible de satisfaire à cette exigence en tenant directement compte de la valeur de ce paramètre. Pour des modèles plus complexes, on peut avoir recours à une preuve mathématique ou à la procédure présentée à l'Annexe C.

## 8. PRODUCTION DE SCÉNARIOS

Une fois tous les critères d'étalonnage satisfaits et en utilisant le taux d'intérêt initial réel, l'actuaire exécuterait les scénarios de taux d'intérêt en utilisant le même modèle, les mêmes paramètres, nombre de scénarios et chiffre aléatoire d'amorce<sup>1</sup> que ceux utilisés pour tester l'étalonnage. Les scénarios de taux d'intérêt peuvent alors être utilisés à des fins d'évaluation ou d'autres travaux. Il est possible de n'utiliser qu'un sous-ensemble des scénarios. Les techniques de réduction des scénarios ne s'inscrivent pas dans la portée de la présente note éducative et l'actuaire consulterait la documentation disponible à ce sujet. L'actuaire peut aussi se reporter à la sous-section 1510 des normes de pratique au sujet du recours à des approximations.

## 9. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE POUR LES AUTRES PAYS

Les scénarios produits à partir des modèles qui satisfont aux critères d'étalonnage conviendraient aux fins des évaluations fondées sur des hypothèses de réinvestissement sans risque à long terme. Bien que les critères aient été élaborés au moyen de données canadiennes, ils pourraient être appliqués à des obligations du gouvernement américain et aux économies de plusieurs pays industrialisés (mais non de tous les pays industrialisés). Un actuaire qui construit un modèle pour ces économies non canadiennes prendrait en compte ces critères comme point de départ et y apporterait les ajustements qu'il juge appropriés. En faisant preuve d'un tel jugement, on peut tenir compte de l'historique des taux, des données sur les marchés et des conditions économiques et politiques. Si des critères d'étalonnage pertinents au pays ou à la devise qui fait l'objet de la modélisation ont été publiés, on pourrait y avoir recours comme autre source de renseignements et pour aider l'actuaire à se faire une opinion. L'utilisation de ces critères peut être acceptable s'il est possible de prouver qu'ils sont conformes en règle générale aux critères énoncés dans la présente note éducative (soit que les critères sont en soi dans l'ensemble conformes, soit que l'approche appliquée pour élaborer les critères est dans

---

<sup>1</sup> L'actuaire vérifierait si les scénarios numérotés correspondants se comportent et convergent de manière semblable pour s'assurer qu'il n'y a pas eu par inadvertance un « remaniement du plateau stochastique aléatoire » au moment de transférer à l'environnement de taux d'intérêt courants pour les scénarios de taux d'intérêt.

l'ensemble conforme à la présente note éducative). S'il est impossible de le prouver, il ne serait alors pas approprié d'utiliser les critères de l'autre pays.

Des pays où les taux ont été récemment ou pendant de longues périodes inhabituellement faibles ou élevés constitueraient des exemples où il peut ne pas être approprié d'avoir recours aux critères. Dans certains pays, l'historique peut être limité et il peut être nécessaire d'avoir une distribution plus large des taux relativement à ces observations limitées afin de prévoir une marge pour incertitude.

Enfin, il ne serait pas approprié d'appliquer les critères d'étalonnage aux marchés dont l'économie est en développement ou en émergence.

## ANNEXE A

On établit le passif selon la MCAB en modélisant les flux monétaires de l'actif et du passif en fonction d'un ensemble défini de scénarios et en comparant les soldes du passif qui en découlent. Si l'approche déterministe est adoptée, l'ensemble des scénarios est celui prescrit à la sous-section 2330 des normes de pratique auquel s'ajoutent les scénarios supplémentaires que l'actuaire juge appropriés en fonction du profil de risque du passif. Le passif est établi pour se trouver dans la partie supérieure de la fourchette du passif des polices qui en découle et est au moins aussi élevé que le passif des polices, le plus élevé découlant des scénarios prescrits. Si une approche stochastique est utilisée, un grand nombre de scénarios de taux d'intérêt différents est généré de manière aléatoire et le passif est calculé selon chaque scénario. Le passif est établi (à la discrétion de l'actuaire) pour correspondre au résultat se situant entre l'ECU 60<sup>2</sup> et l'ECU 80.

### *Modélisation stochastique*

La modélisation stochastique des taux d'intérêt se rapproche de la modélisation stochastique du rendement des actions (qui sert habituellement à supporter les passifs des garanties d'investissement des rentes). Elle en diffère en ce sens qu'une part importante de la modélisation des fluctuations des taux d'intérêt repose sur une hypothèse de taux non négatifs et, règle générale, sur une certaine forme de retour à la moyenne. La moyenne est habituellement choisie en fonction d'un ensemble pertinent de taux d'intérêt historiques. Le modèle utilisé servira à définir la manière dont les taux fluctuent d'une période à l'autre au moyen d'une formule appliquée aux valeurs générées grâce à une simulation Monte Carlo. Les paramètres du modèle représentent la moyenne, la volatilité et habituellement la force du retour à la moyenne à long terme. Nous ne prescrivons pas, dans cette note sur les critères d'étalonnage, le type du modèle ou l'établissement des paramètres, mais nous mettons plutôt l'accent sur les scénarios découlant de l'application du générateur de scénarios. L'actuaire a ainsi la marge de manœuvre nécessaire pour choisir l'une des formulations standards de modèle ou en modifier une pour créer un nouveau modèle qui convient davantage à l'application sous étude.

### *Choix de la modélisation stochastique au lieu de la modélisation déterministe*

La modélisation stochastique ne s'éloigne pas radicalement des mesures déterministes. Il s'agit d'une forme améliorée d'essai de scénarios dans le cadre de laquelle un grand nombre de scénarios aléatoires sont élaborés à l'aide d'un modèle qui est une représentation de l'environnement réel. Pour décider s'il aurait recours à la modélisation stochastique des taux d'intérêt à des fins d'évaluation, l'actuaire tiendrait compte de la complexité de l'interaction entre les taux d'intérêt et les flux monétaires de l'actif et du passif dans le modèle de la MCAB, et de l'importance relative de l'impact de la volatilité des taux d'intérêt sur les résultats. Si le produit est conçu de façon telle que la plupart des sorties de fonds du passif se feront dans une fourchette relativement étroite autour de la moyenne de la distribution des résultats, l'approche consistant à utiliser la meilleure estimation plus une marge explicite est appropriée. Si, cependant, il y a des sorties de fonds importantes qui ne se produisent que dans les zones à faible probabilité de la distribution (les extrémités), une approche stochastique peut alors produire une image

---

<sup>2</sup> Espérance conditionnelle unilatérale (ECU). L'ECU 60 correspond à la moyenne de la tranche de 40 % des passifs les plus élevés découlant de l'application de tous les scénarios de l'ensemble.

plus appropriée de la portée des expositions aux taux d'intérêt. La modélisation stochastique peut aussi se révéler l'approche privilégiée s'il n'y a aucune meilleure estimation naturelle, par exemple, lorsqu'il s'agit de modéliser les taux d'intérêt disponibles à des fins de réinvestissement dans 25 ans ou plus.

### *Considérations d'ordre pratique*

Le passif stochastique selon la MCAB correspond à la moyenne d'un sous-ensemble des passifs les plus élevés en découlant. Il importe de souligner que cela peut vouloir dire que le passif correspond à une moyenne des scénarios qui ne sont ni les scénarios de taux d'intérêt les plus faibles ni les scénarios de taux d'intérêt les plus élevés. Prenons, par exemple, un produit avec flux monétaires positifs nets élevés provenant de primes pour les dix premières années, et avec flux monétaires négatifs pour les dix années suivantes, de telle sorte que, à l'année 20, la masse des flux est négative, les prestations excédant alors les revenus de primes et de placements. Un scénario défavorable comportera alors de faibles taux d'intérêt pendant les dix premières années et des taux élevés pendant les années après l'année 20. Il s'agit d'un résultat naturel de la modélisation stochastique. S'il faut déterminer un vecteur de taux d'intérêt moyen unique afin de subdiviser un bloc de polices après l'exécution de la MCAB, le modèle pourrait alors produire un curieux schéma.

### *Exemples de types de modèles d'utilisation courante*

Dans cette section, des exemples de modèle simple de taux d'intérêt sont présentés. Le but est d'illustrer comment certains modèles peuvent être étalonnés et utilisés et non de recommander un modèle en particulier. En fait, les modèles plus complexes permettront un meilleur ajustement aux points d'étalonnage.

Les modèles présentés ici sont tous des modèles avec retour à la moyenne. Le retour à la moyenne est une caractéristique reconnue des taux d'intérêt, laquelle est bien documentée dans les ouvrages financiers disponibles.

Les modèles présentés ici sont utilisés pour modéliser les taux d'intérêt à long terme. Ils se caractérisent par un processus de dérive et par un processus stochastique. Le processus de dérive définit le taux et la rapidité du retour à la moyenne. Le processus stochastique varie d'un modèle à l'autre. La variance gradue la volatilité en fonction du niveau courant des taux d'intérêt.

### *Forme du modèle Vasicek*

Fait référence à une forme de modèle puisque le modèle est appliqué pour projeter le taux à long terme. Le modèle Vasicek original est un modèle de taux d'intérêt à court terme. Le modèle, dans sa forme discrète, se présente par l'équation suivante :

$$r_t = (1 - \alpha)r_{t-1} + \alpha\tau + Z_t,$$

$$\text{où } Z_t \sim N(0, \sigma^2).$$

Ce modèle exige trois paramètres :

$\tau$  correspond au taux stationnaire à long terme auquel le processus retourne;

$\alpha$  correspond à la force du retour à la moyenne, et doit se situer entre 0 et 1; 0 signifierait aucun retour à la moyenne et 1, un retour complet à la moyenne au cours de la période suivante;

$\sigma$  est le paramètre de volatilité du processus stochastique.

Pour déterminer les paramètres de ce modèle à partir d'un ensemble de données historiques, par exemple la série V122487 de CANSIM représentant le rendement des obligations de plus de 10 ans du gouvernement du Canada, on peut adopter une approche d'estimation du maximum de vraisemblance (EMV) avec contraintes.

Pour le modèle Vasicek, qui est un modèle autorégressif, le taux d'intérêt à l'état stationnaire projeté suivra une distribution normale décrite par l'équation suivante :

$$r_t \sim N\left(\tau, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right).$$

Cette distribution normale des taux découlant du modèle a pour effet qu'il est pratiquement impossible d'éviter les scénarios de taux d'intérêt négatifs tout en produisant des scénarios dont les taux atteignent les niveaux enregistrés au début des années 1980.

Puisque nous avons neuf points d'étalonnage et que le modèle ne comporte que trois paramètres, et compte tenu du fait que le taux à l'état stationnaire suit une distribution normale, il est possible d'élaborer une solution explicite pour les paramètres qui permettront d'atteindre exactement les points d'étalonnage clés (10<sup>e</sup> et 97,5<sup>e</sup> centiles). Il est peu probable que d'autres points d'étalonnage représentent des contraintes pour la forme du modèle Vasicek.

### **Forme du modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR)**

Ce modèle est semblable au modèle Vasicek, sauf que le processus stochastique est gradué selon la racine carrée du taux d'intérêt. Ceci fait en sorte que le taux d'intérêt ne peut devenir négatif, car plus le taux d'intérêt  $r_t$  se rapproche de zéro, plus la formulation se rapproche d'un processus de retour à la moyenne sans terme stochastique. Ce modèle repose sur l'équation suivante :

$$r_t = (1-\alpha)r_{t-1} + \alpha\tau + \sqrt{r_{t-1}}Z_t,$$

$$\text{où } Z_t \sim N(0, \sigma^2).$$

À l'instar de la forme du modèle Vasicek, celle du modèle CIR exige elle aussi trois paramètres qui ont la même interprétation.

Encore une fois, il est possible de déterminer les paramètres de ce modèle en utilisant un ensemble de données historiques avec une approche d'EMV avec contraintes. Cependant, dans ce cas, le taux à l'état stationnaire ne suit pas une distribution normale. On peut

avoir recours à des simulations pour calculer les centiles nécessaires. Si une telle approche est adoptée, il est alors nécessaire d'établir une durée raisonnable à laquelle nous présumons que le taux à l'état stationnaire est atteint puisque la distribution continue de s'étendre dans le temps.

Ce modèle offre l'avantage de produire une distribution asymétrique. Il est possible de générer des scénarios avec des taux qui atteignent les niveaux enregistrés au début des années 1980 et éviter des taux d'intérêt négatifs dans les autres scénarios.

Puisque les points d'étalonnage sont plus nombreux que les paramètres du modèle, il est aussi possible d'élaborer un ensemble de paramètres qui répondent exactement aux points d'étalonnage à une durée en particulier.

### ***Forme du modèle Brennan-Schwartz***

Ce modèle est semblable au modèle CIR, avec la différence étant que le processus stochastique est maintenant gradué en fonction du taux d'intérêt. Ce modèle repose sur l'équation suivante :

$$r_t = (1 - \alpha)r_{t-1} + \alpha\tau + r_{t-1}Z_t,$$

$$\text{où } Z_t \sim N(0, \sigma^2).$$

Dans ce cas, en raison de la graduation plus forte du paramètre de volatilité, l'asymétrie de la distribution du taux d'intérêt à long terme sera plus prononcée. Grâce à cette particularité, ce modèle correspond mieux aux données historiques que les modèles précédents.

### ***Modèle Multiplicative Shock***

Ce modèle comporte une forme différente, car sa composante stochastique suit un processus long-normal. Il repose sur l'équation suivante :

$$r_t = [(1 - \alpha)r_{t-1} + \alpha\tau]e^{Z_t},$$

$$\text{où } Z_t \sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2\right).$$

Il est intéressant de noter que la distribution des taux d'intérêt à long terme générés par ce modèle est très semblable à la forme du modèle Brennan-Schwartz.

## ANNEXE B

Dans cette annexe, nous donnons un exemple de deux modèles et ensembles de paramètres utilisés pour la mise à l'essai et l'élaboration des critères d'étalonnage.

Cette information est transmise à des fins de transparence et pour aider l'actuaire à comprendre comment les modèles fonctionnent et sont étalonnés. L'actuaire est mis en garde contre le fait de simplement appliquer ces modèles dans le cadre de son travail; il s'agit pour l'actuaire d'acquérir suffisamment d'expertise afin de pouvoir porter un jugement actuariel dans le choix des paramètres et de la forme du modèle stochastique conformément aux critères d'étalonnage.

La forme suivante du modèle de **Brennan-Schwartz** (paramètre de volatilité à titre de puissance du taux = 1) a été utilisée :

$$r_t = (1 - \alpha)r_{t-1} + \alpha\tau + r_{t-1}Z_t,$$

$$\text{où } Z_t \sim N(0, \sigma^2).$$

Moyenne à long terme : 6,23 %

Pondération du retour à la moyenne au taux d'équilibre 0,00291 (ou pondération de 0,99709 au taux antérieur observé, équivalant à une période de 28,6 années =  $1/(12*0,0291)$ ).

Volatilité = 0,03524 (multiplier par  $12^{0,5}$  pour annualiser), multiplier par le taux pour traduire les unités de la fraction des taux aux taux en soi.

Nombre de scénarios générés = 50 000 (une application d'arbre trinomial a aussi été utilisée).

La forme suivante du modèle **Cox-Ingerson-Ross** (paramètre de volatilité à titre de puissance du taux = 0,5) a été utilisée :

$$r_t = (1 - \alpha)r_{t-1} + \alpha\tau + \sqrt{r_{t-1}}Z_t,$$

$$\text{où } Z_t \sim N(0, \sigma^2).$$

Moyenne à long terme : 6,77 %

Pondération du retour à la moyenne au taux d'équilibre 0,00440 (ou pondération de 0,99560 au taux antérieur observé, équivalant à une période de 18,9 années =  $1/(12*0,0440)$ ).

Volatilité = 0,01046 (multiplier par  $12^{0,5}$  pour annualiser), multiplier par le taux  $^{0,5}$  pour traduire les unités de la fraction des taux  $^{0,5}$  aux taux en soi.

Nombre de scénarios générés = 50 000 (une application d'arbre trinomial a aussi été utilisée).

## ANNEXE C

Les critères d'étalonnage visent entre autres choses à garantir que les scénarios représentent adéquatement les périodes soutenues de faibles taux, pendant lesquelles le revenu de placement sur les réinvestissements nécessaires pour supporter les garanties à long terme est limité. Même si les critères d'extrémité à un horizon précis permettent dans une certaine mesure de garantir ce résultat, ils n'excluent pas les modèles qui produisent des scénarios dont les périodes de faibles taux ont tendance à être de courte durée, et donc peu de scénarios présenteraient de faibles taux d'intérêt répartis en moyenne sur une période suffisamment longue pour que l'activité de réinvestissement puisse avoir un impact financier important. Il est possible de démontrer statistiquement l'existence de périodes soutenues de faibles taux si les scénarios qui sont relativement faibles dans les premières années ont tendance à le demeurer dans les années ultérieures. Par exemple, même s'il est possible d'adopter d'autres approches et comme solution de rechange à une preuve mathématique, on peut démontrer que ce critère est respecté à l'aide de la procédure suivante :

1. Trier les scénarios en fonction des taux à long terme des plus faibles aux plus élevés à l'année de projection  $T_0$ , où  $T_0$  correspond à une période suffisamment longue pour présenter une dispersion substantielle des taux, mais n'excédant pas la plupart des réinvestissements prévus. Pour un bloc type garanti à long terme, la période  $T_0$  pourrait varier entre 5 et 10 ans.
2. Regrouper les scénarios en fonction du quartile des taux à la période  $T_0$ , du plus faible (quartile 1) au plus élevé (quartile 4). Calculer l'ampleur de la dispersion des scénarios de faible taux par rapport à la dispersion des scénarios centraux ( $T_0$ ) = Taux moyen ( $T_0$ ) dans le quartile 1 – taux moyen ( $T_0$ ) dans la combinaison des quartiles (quartiles 2 et 3).
3. En utilisant le même regroupement des scénarios (classés à la période  $T_0$ , et **non** reclassés à la période  $T_0+10$ ), calculer la dispersion 10 ans plus tard ( $T_0+10$ , classé  $T_0$ ) = Taux moyen ( $T_0+10$ ) dans le quartile 1 – taux moyen ( $T_0+10$ ) dans la combinaison des quartiles (quartiles 2 et 3).
4. Le critère du retour à la moyenne pendant la période de projection de  $T_0$  à  $T_0 +10$  est respecté si la dispersion ( $T_0+10$ , classée  $T_0$ )  $\geq$  dispersion de  $0,5 * (T_0)$ .
5. Si l'actuaire peut démontrer que le taux du retour à la moyenne du modèle est tout aussi robuste sur d'autres périodes de projection, cet unique test serait suffisant. Le cas échéant, le test serait répété pour des périodes d'impact financier suffisamment important pour démontrer l'existence des périodes soutenues de faibles taux.
6. Si, de l'avis de l'actuaire, la persistance des taux élevés cause des tensions financières pour une application en particulier, la démonstration serait répétée pour ces taux (quartile 4 par rapport aux quartiles 2 et 3).

Il est possible de prouver qu'un modèle avec un régime unique et un retour à la moyenne linéaire simple (c.-à-d.,  $E(r(t+dt)) = r(t) + (1/\text{période de retour}) * dt * (\text{moyenne à long terme} - r(t))$ ) satisfait à ces critères (avec un nombre suffisant de scénarios) si la période

du retour est supérieure à 14,5 ans<sup>3</sup>. Si la période de projection ( $dt$ ) est supérieure à un mois, il se peut qu'il faille apporter un léger rajustement au seuil de la période du retour à la moyenne.

On n'aurait habituellement pas recours à des modèles comportant des caractéristiques qui annuleraient le but statistique de ce critère (p. ex., une composante cyclique des taux avec une périodicité d'environ 10 ans). Si des circonstances exceptionnelles font que l'actuaire estime qu'un modèle du genre est approprié, l'actuaire élaborerait des méthodes statistiques robustes convenant aux caractéristiques du modèle pour démontrer l'existence de périodes soutenues importantes de faibles taux, conformément à ce critère.

Enfin, il semble probable que les modèles satisfaisant aux critères de l'extrémité à l'équilibre à long terme et reproduisant de près la volatilité représentative au plan historique répondront aussi à ce critère du retour à la moyenne, même si pour certains modèles, il faudrait peut-être apporter de légers ajustements aux paramètres. Certaines analyses ont été effectuées qui portent à croire que les critères utilisés ici sont conformes à des taux à long terme de retour à la moyenne statistiquement plausibles. Certaines estimations de retour à la moyenne basées sur la concordance statistique avec l'historique des fluctuations des taux peuvent produire un retour à la moyenne plus fort dans une certaine mesure (période plus courte) ou plus faible (période plus longue) que celui généré par ce critère. Les estimations statistiques du retour à la moyenne ont tendance à comporter une bonne dose d'incertitude et peuvent varier considérablement selon la période historique utilisée pour l'exercice. Ainsi, un retour à la moyenne plus fort que celui généré par ce critère, même s'il s'agit d'une meilleure estimation statistique, peut donner un sentiment de confiance trompeur relativement à la probabilité de périodes soutenues de taux extrêmes.

---

<sup>3</sup> Avec ce simple retour à la moyenne, à la limite continue,  $E(r(t+n)) = \text{moyenne à long terme} + \exp(-n/\text{période de retour}) * (r(t) - \text{moyenne à long terme})$ . Pour une période écoulée  $n$  de 10 ans, le coefficient de pondération de dégradation exponentielle sur le taux initial sera  $\approx 0,5$  lorsque la période du retour à la moyenne sera  $\approx 10 / \ln(2) = 14,42$ .